Hiver 2018

Analyse d'images
IMN 259

Transformée de Fourier
appliquée à l'imagerie numérique

Par
Pierre-Marc Jodoin

Transformée de Fourier 2D

Cas 1D

$$\Im[\, f(x)] = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$\Im^{-1}[\, F(u)] = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

Cas 2D

$$\boxed{\begin{aligned} \Im[\, f(x,y)] &= F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi ux} e^{-j2\pi vy} dxdy \\ \Im^{-1}[\, F(u,v)] &= f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi ux} e^{j2\pi vy} dudv \end{aligned}}$$

où x,y sont des coordonnées **spatiales**
et u,v des coordonnées **spectrales**

$$F(u,v) = Re[\, F(u,v)] + j\, Im[\, F(u,v)] = \underbrace{R(u,v)}_{\text{(Réelle)}} + j\underbrace{I(u,v)}_{\text{(Imaginaire)}}$$

$$F(u,v) = |F(u,v)| e^{j\theta(u,v)}$$

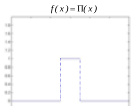
$\theta(u,v) = arctan(I(u,v)/R(u,v))$: Phase

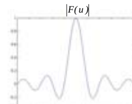
$|F(u,v)| = \sqrt{R(u,v)^2 + I(u,v)^2}$: Spectre d'amplitude

$|F(u,v)|^2 = R(u,v)^2 + I(u,v)^2$: Spectre de puissance

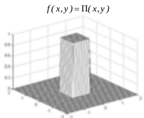
Transformée de Fourier 2D

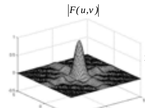
Exemple, la fonction « porte »





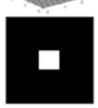
$$\Im[\, \Pi(x)] = \frac{sin(\pi u)}{\pi u}$$

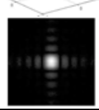




$$\Im[\, \Pi(x,y)] = \frac{sin(\pi u)}{\pi u}\frac{sin(\pi v)}{\pi v}$$

Carte de profondeur :
f(x,y) et *F(u,v)* visualisés
à l'aide d'images 2D.





TF d'un signal discrétisé

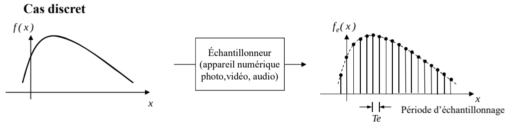
TF discrète 1D

Cas continu

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}du$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}dx$$

Cas discret



$f_e(x)=f(x_0+xT_e)\quad x=0,1,2,...,N-1$
(souvent $x_0=0$)

$$F_e(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f_e(x)e^{-j2\pi x\frac{u}{N}} \qquad x=0,1,2,...,N-1$$

$$f_e(x)=\sum_{u=0}^{N-1} F_e(u)e^{j2\pi\frac{u}{N}x} \qquad u=0,1,2,...,N-1$$

TF discrète 1D

Cas continu

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}du$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}dx$$

Cas discret

Pour alléger la notation et rester conforme avec le livre de Gonzalez et Woods on dira désormais:

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi x\frac{u}{N}}$$

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{j2\pi\frac{u}{N}x}$$

TF discrète 2D

Cas continu

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

Cas discret

$$\boxed{F(u,v)=\frac{1}{NM}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M})}}\qquad \begin{matrix}u=0,1,2,\ldots,N-1\\ v=0,1,2,\ldots,M-1\end{matrix}$$

$$\boxed{f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M})}}\qquad \begin{matrix}x=0,1,2,\ldots,N-1\\ y=0,1,2,\ldots,M-1\end{matrix}$$

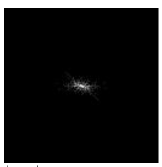
Note: les images qu'on traite sont parfois carrées, donc $N==M$

7

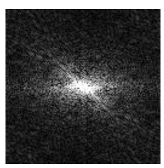
TF discrète

Exemple

$f(x,y)$



$|F(u,v)|$



$255\log(1+|F(u,v)|)$

Note:

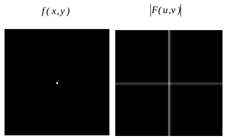
- On affiche généralement le module de la TF $|F(u,v)|$
- Puisque les hautes fréquences sont beaucoup plus faibles que les basses fréquences, on utilise fréquemment un recalage logarithmique: $k\log(1+|F(u,v)|)$
- On positionne l'origine au centre de l'image à l'aide d'un **recalage cyclique.**
- Les propriétés de la TF2D sont les mêmes que pour la TF 1D.

8

TF discrète

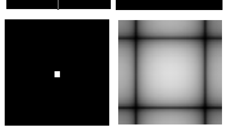
$f(x,y)$ $|F(u,v)|$

Un pixel isolé peut être vu comme un delta de Dirac en x et en y.



Un trait vertical d'un pixel d'épais peut être vu comme un delta de Dirac en x et comme un signal continu en y.

Un carré peut être vu comme une fonction porte en x et en y.

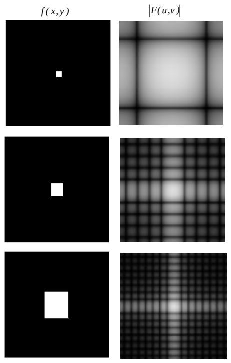


9

TF discrète

Application de la propriété du changement d'échelle vue au chapitre précédent.

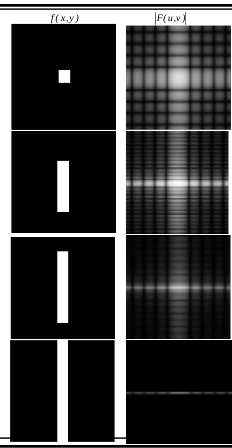
$$\Im[f(ax,by)] = \frac{1}{|a||b|} F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$



10

TF discrète

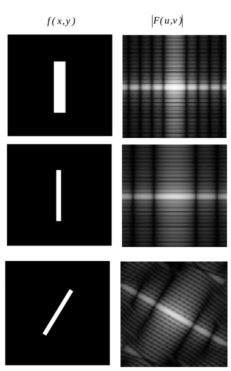
Application de la propriété du changement d'échelle vue au chapitre précédent.



11

TF discrète

Changement d'échelle



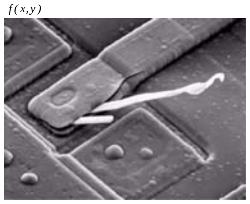
Rotation dans le domaine spatial = rotation dans le domaine spectral.

12

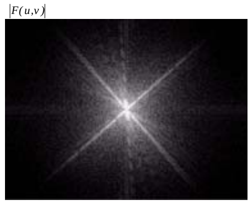
TF discrète

Autre exemple, TF d'une image d'un circuit intégré

$f(x,y)$



$|F(u,v)|$



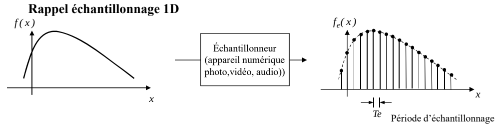
13

Périodicité et recalage cyclique

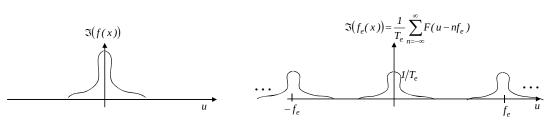
14

Périodicité et recalage cyclique

Rappel échantillonnage 1D



Échantillonner un signal spatial revient à le dupliquer à l'infini dans le domaine spectrale



15

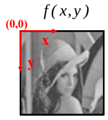
Périodicité et recalage cyclique

Périodicité

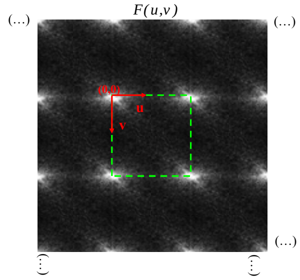
Puisqu'une image numérique est un signal échantillonné (T_e*=1 pixel*) son spectre fréquentiel est **périodique**

$$F(u,v)=F(u+N,v)=F(u,v+M)=F(u+N,v+M)=\ldots$$

$f(x,y)$



$F(u,v)$



Périodicité et recalage cyclique

Périodicité

Puisqu'une image numérique est un signal échantillonné (T_e*=1 pixel*) son spectre fréquentiel est **périodique**

$$F(u,v)=F(u+N,v)=F(u,v+M)=F(u+N,v+M)=\ldots$$

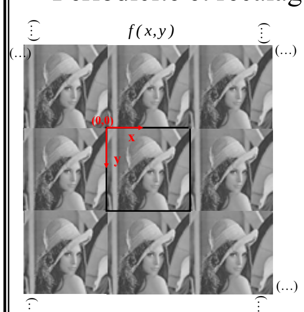
De façon équivalente, puisque $F(u,v)$ est un signal échantillonné (c'est un **spectre de raies**), alors l'image spatiale *f(x,y)* est aussi un signal **périodique**

$$f(x,y)=f(x+N,y)=f(x,y+M)=f(x+N,y+M)=\ldots$$

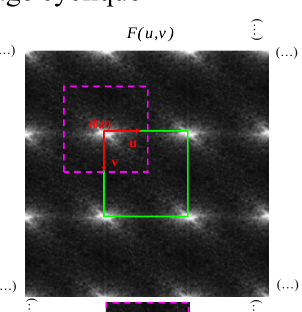
17

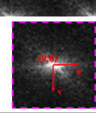
Périodicité et recalage cyclique

$f(x,y)$



$F(u,v)$

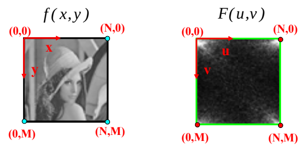




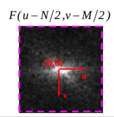
18

Périodicité et recalage cyclique

Puisque le centre géométrique (0,0) d'une image est [presque] toujours centré sur le pixel supérieur gauche, alors l'origine (0,0) de $F(u,v)$ est aussi centrée en haut à gauche.



Pour ramener l'origine de $F(u,v)$ au centre de l'image, il faut translater $F(u,v)$ par (N/2,M/2)
C'est ce qu'on appelle un **recalage cyclique**.



Périodicité et recalage cyclique

Suivant la propriété de la translation exposée au chapitre précédent:

$$F(u-a,v-b) \Leftrightarrow f(x,y)e^{j2\pi(\frac{ax}{N}+\frac{by}{M})}$$

Puisque a=N/2 et b=M/2 alors

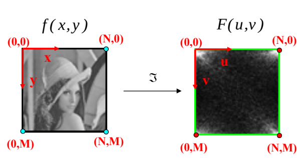
$$\begin{aligned} F(u-N/2,v-M/2) \Leftrightarrow\ & f(x,y)e^{j2\pi(\frac{Nx}{2N}+\frac{My}{2M})} \\ =\ & f(x,y)e^{j\pi(x+y)} \\ =\ & f(x,y)(cos(\pi(x+y))+j\,sin(\pi(x+y))) \\ =\ & f(x,y)cos(\pi(x+y)) \\ =\ & f(x,y)(-1)^{x+y} \end{aligned}$$

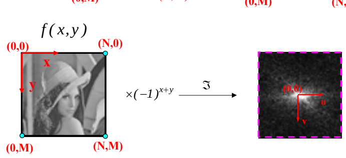
car

$$cos(\pi(x+y)) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x+y \text{ est pair} \\ -1 & \text{lorsque } x+y \text{ est impair} \end{cases}$$

Périodicité et recalage cyclique

En conclusion, pour faire un recalage cyclique de la transformée de Fourier 2D d'une image *f(x,y)*, on a qu'à multiplier tous ses pixels par $(-1)^{x+y}$





Convolution discrète

22

Convolution discrète

La convolution

Cas continu

$$(f * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(x - t)dt \qquad \text{1D}$$

$$(f * h)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,r)h(x - t, y - r)dtdr \qquad \text{2D}$$

Cas discret

$$(f * h)(x) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} f(t)h(x - t) \qquad \text{1D}$$

$$(f * h)(x, y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty} f(t, r)h(x - t, y - r) \qquad \text{2D}$$

Rappel théorème de la convolution

$$\Im\big((f * h)(x)\big) = F(u)H(u) \;\text{ et }\; \Im^{-1}((F * H)(u)) = f(x)h(x) \qquad \text{1D}$$

Note: ce théorème est valable pour les cas continu et discret

23

Convolution discrète

Cas 2D $(f * h)(x,y) = \sum_{r}\sum_{t} f(t,r)h(x - t, y - r)$

(0,0)

10	*11*	*12*	*13*	*14*
15	*16*	*17*	*18*	*19*
20	*21*	*22*	*23*	*24*
25	*26*	*27*	*28*	*29*
30	*31*	*32*	*33*	*34*

f(x,y)

$*$

(0,0)

-1	*0*
1	*2*

h(x,y)

$=$

-10	*-11*	*-12*	*-13*	*-14*
-5	*15*	*17*	*19*	*21*
-5	*25*	*27*	*29*	*31*
-5	*35*	*37*	*39*	*41*
-5	*45*	*47*	*49*	*51*

(ajout de zéros)

-1	*0*
1	*2*

0	*-1*
2	*1*

Réflexion en X

2	*1*
0	*-1*

(0,0)

Réflexion en Y

24

Convolution discrète

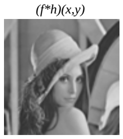
Exemples concrets, un avant goût des filtres spatiaux

f(x,y)

h(x,y)

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} /9$$

*(f*h)(x,y)*



h(x,y)

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1 \end{bmatrix} /25$$

*(f*h)(x,y)*

h(x,y)

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} /2$$

*(f*h)(x,y)*

(les valeurs négatives apparaissent en noir)

h(x,y)

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&-1&5&-1&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

*(f*h)(x,y)*

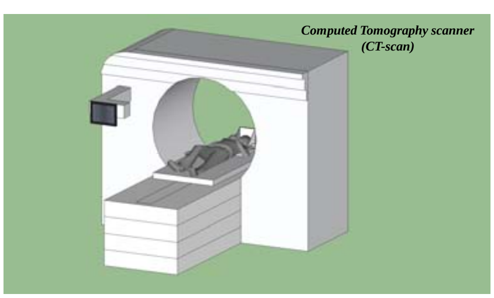
25

Tomographie

26

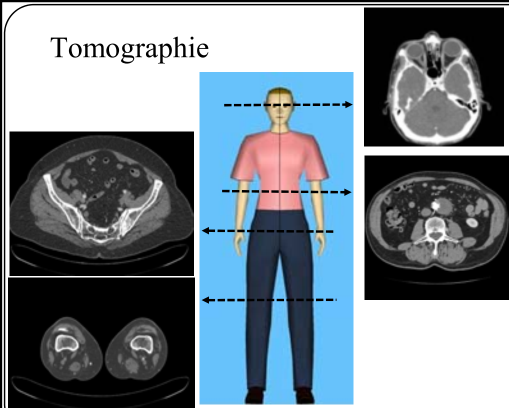
Application de la TF

La tomographie



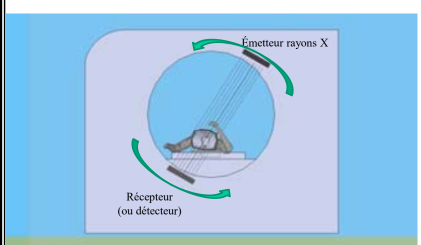
27

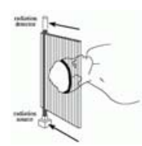
Tomographie



28

Tomographie

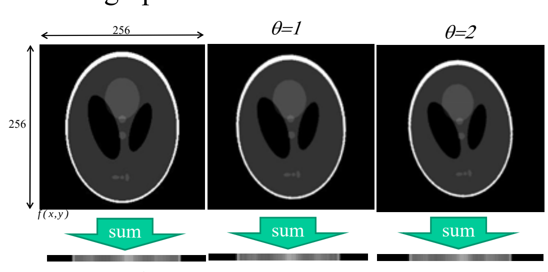




Crédit : http://www.dspguide.com/ch25/5.htm

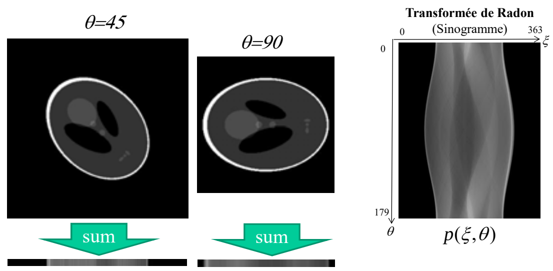
29

Tomographie



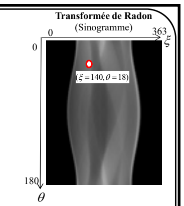
30

Tomographie



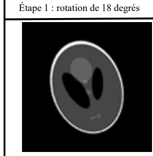
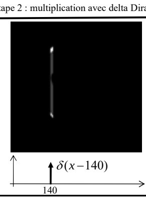
31

Tomographie



Plus formellement, pour calculer $p(\xi=140,\theta=18)$

$f(x,y)$

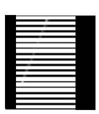
Étape 1 : rotation de 18 degrés	Étape 2 : multiplication avec delta Dirac	Étape 3 : somme (intégrale)
		$\sum_x \sum_y$

32

Tomographie

De façon équivalente, on peut intégrer le long d'une droite définie par (ξ,θ)

$f(x,y)$

Étape 1 : Trouver une droite de 18 degrés et décalée de 140	Étape 2 : multiplication avec delta Dirac	Étape 3 : somme (intégrale)
 $x\cos\theta + y\sin\theta = \xi$	 $f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \xi)$	$\sum_x \sum_y$

$$p(\xi,\theta) = \sum_x \sum_y f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \xi)$$

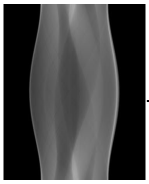
ou

$$p(\xi,\theta) = \iint f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \xi)dxdy$$

33

Tomographie

Transformée de Radon



$p(\xi,\theta)$

Tomographie
(retrouver $f(x,y)$ à partir de la TR)

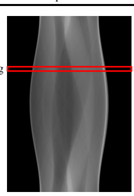
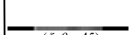
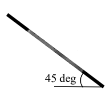
$f(x,y)$

2 méthodes parmi les plus connues:
1. **Projection inverse**
2. **Approche par TF**

34

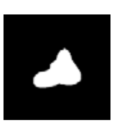
Projection inverse

Projection inverse d'une seule ligne : $\theta = 45$

Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4
45 deg 	 $p(\xi,\theta=45)$	 45 deg	 $f'(x,y) = p(x\cos 45 + y\sin 45, \theta = 45)$

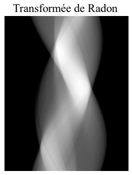
35

Projection inverse



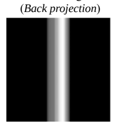
$f(x,y)$

Transformée de Radon



$p(\xi,\theta)$

Projection inverse pour toutes les lignes (*Back projection*)

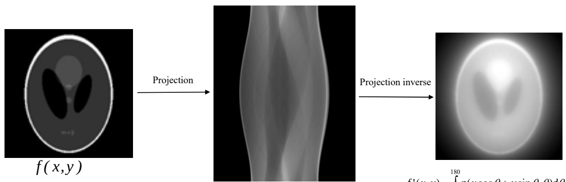


$$f'(x,y) = \int_0^{180} p(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) d\theta$$

Crédit : http://www.snaggledworks.com/em_for_dummies/back_projection.html

36

Projection inverse



$f(x,y)$

$p(\xi,\theta)$

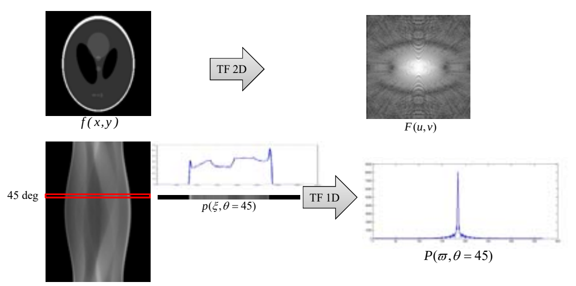
$$f'(x,y)=\int_0^{180} p(x\cos\theta+y\sin\theta,\theta)d\theta$$

37

Approche par TF

Théorème de la tranche centrale (*Central Slice Theorem*)

Des résultats plus précis (moins flous) peuvent être obtenus via la TF.



$f(x,y)$

$F(u,v)$

$p(\xi,\theta=45)$

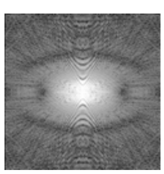
$P(\varpi,\theta=45)$

$$p(\xi,\theta)=\iint f(x,y)\delta(x\cos\theta+y\sin\theta-\xi)dxdy$$

38

Approche par TF

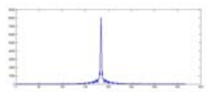
Théorème de la tranche centrale (*Central Slice Theorem*)



$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

Approche par TF

Théorème de la tranche centrale (*Central Slice Theorem*)



$$
\begin{aligned}
P(\varpi,\theta) &= \Im[p(\xi,\theta)] \\
&= \int p(\xi,\theta)e^{-j2\pi\varpi\xi}d\varpi \\
&= \int\left(\iint f(x,y)\delta(x\cos\theta+y\sin\theta-\xi)dxdy\right)e^{-j2\pi\varpi\xi}d\varpi \\
&= \int\iint f(x,y)\delta(x\cos\theta+y\sin\theta-\xi)e^{-j2\pi\varpi\xi}d\varpi dxdy
\end{aligned}
$$

En vertu des propriétés du delta de Dirac $\left(f(x)\delta(x-a)=f(a)\right)$

$$P(\varpi,\theta)=\iint f(x,y)e^{-j2\pi\varpi(x\cos\theta+y\sin\theta)}dxdy$$

40

Approche par TF

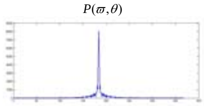
Théorème de la tranche centrale (*Central Slice Theorem*)

$$P(\varpi,\theta)=\iint f(x,y)e^{-j2\pi\varpi(x\cos\theta+y\sin\theta)}dxdy$$

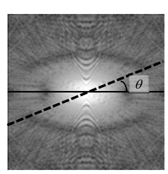
Et en posant que $u=\varpi\cos\theta$ et $v=\varpi\sin\theta$, on réalise que $P(\varpi,\theta)$ est une droite dans l'espace fréquentiel de *F(u,v)*

$$P(\varpi,\theta)=\iint f(x,y)e^{-j2\pi(xu+yv)}dxdy$$

$P(\varpi,\theta)$



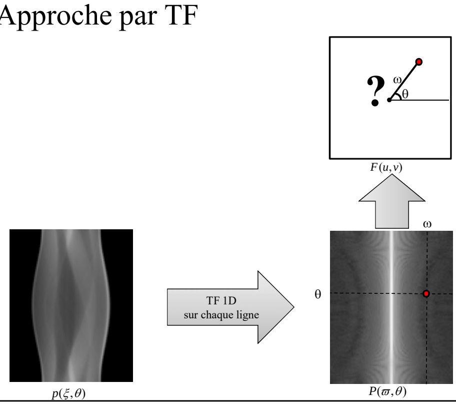
$\rightarrow$



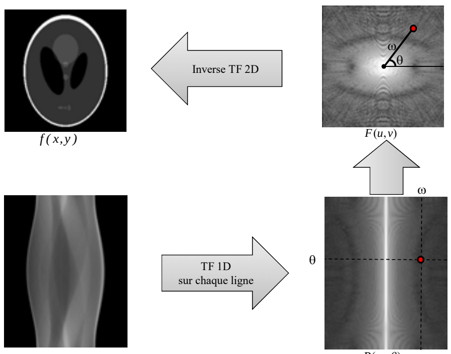
$$F(u,v)=\iint f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

41

Approche par TF

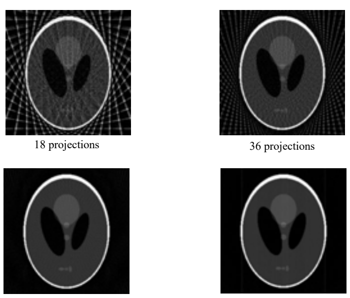


Approche par TF



Approche par TF

Résultats



18 projections

36 projections

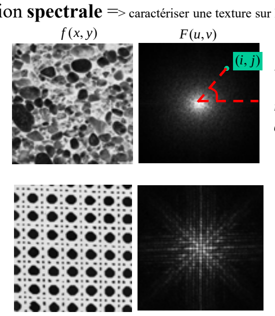
90 projections

180 projections

Caractérisation de textures

Représentation des textures

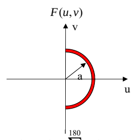
Représentation **spectrale** => caractériser une texture sur la base de la forme de la T.F.



$F(i,j) = F(r,\theta)$

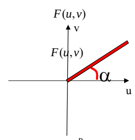
r : distance à l'origine
θ : angle d'élévation

Représentation des textures



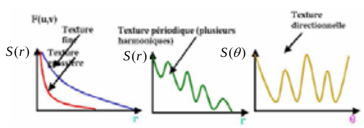
$$S(r=a) = \sum_{\theta=0}^{180} F(a,\theta)$$

Somme de tous les éléments situés à une distance « a » de l'origine



$$S(\theta=\alpha) = \sum_{r=0}^{R} F(r,\alpha)$$

Somme de tous les éléments situés à un angle « a »



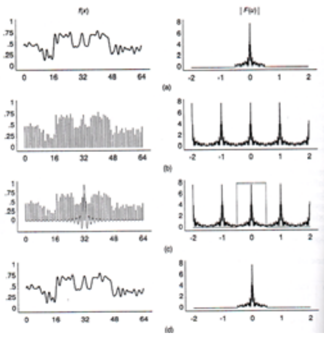
Mignotte

L'*aliasing*

(ou repliement de spectre)

L'*aliasing*

Vous vous souvenez de la théorie de l'échantillonnage?



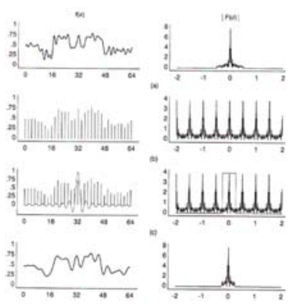
Foley-Vandam

49

L'*aliasing*

Qu'arrive-t-il si on échantillonne un signal avec une fréquence plus petite que la fréquence de Nyquist?

Repliement de spectre: ***Aliasing***



Foley-Vandam

50

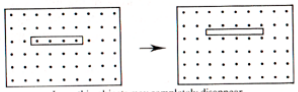
L'*aliasing*

Deux définitions classiques de l'aliassing :

1. Perte d'information causée par un échantillonnage de fréquence trop basse.

1er exemple: Voir la page précédente

2e exemple:



Long thin objects may completely disappear

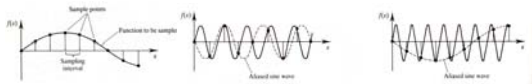
Alan Watt

51

L'*aliasing*

Deux définitions classiques de l'aliassing :

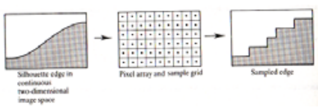
2. Induction de basses fréquences causée par un échantillonnage de fréquence trop basse.

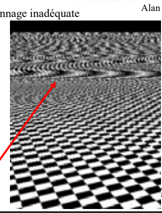


Fréquence d'échantillonnage adéquate

Fréquence d'échantillonnage inadéquate

Alan Watt



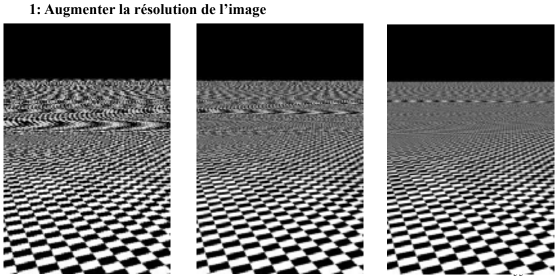


Effets de Moiré

L'*aliasing*

Bien qu'il soit généralement impossible de résoudre le problème de *l'aliassing*, on peut tout de même en masquer les effets. Comment? Parmi les nombreuses façons de lutter contre *l'aliassing*, il en existe deux qui reviennent souvent.

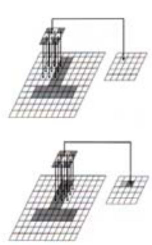
1: Augmenter la résolution de l'image



L'*aliasing*

Bien qu'il soit généralement impossible de résoudre le problème de l'aliassing, on peut tout de même en masquer les effets. Comment? Parmi les nombreuses façons de lutter contre *l'aliassing*, il en existe deux qui reviennent souvent.

2: Appliquer un filtre passe-bas. C'est ce qu'on appelle un processus d'***antialiassing.*** C'est d'ailleurs ce que le *Mip Mapping* fait.



Crédit : Alan Watt

54

Les faits saillants…

1.	TF d'un signal 2D **échantillonné**	$F(u,v)=\frac{1}{NM}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M})}$ $f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1}F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M})}$
2.	Périodicité	Puisqu'une image $f(x,y)$ et sa TF $F(u,v)$ sont des signaux échantillonnés, alors $f(x,y)$ et $F(u,v)$ sont des signaux qui se répètent à l'infini.
3.	Recalage cyclique	Pour que l'origine de $F(u,v)$ apparaisse au centre de l'image, il faut multiplier les pixels de $f(x,y)$ par $(-1)^{x+y}$
4.	Convolution discrète 2D	$(f*h)(x,y)=\sum_{r}\sum_{t}f(t,r)h(x-t,y-r)$
5.	Théorème de la convolution	$* \underset{\Im^{-1}}{\overset{\Im}{\rightleftarrows}} \times$ et $\times \underset{\Im^{-1}}{\overset{\Im}{\rightleftarrows}} *$
6.	Tomographie	$p(\xi,\theta)=\iint f(x,y)\delta(x\cos\theta+y\sin\theta-\xi)dxdy$
7.	Textures	$S(r=a)=\sum_{\theta=0}^{180}F(a,\theta)$ $\quad S(\theta=\alpha)=\sum_{r=0}^{R}F(r,\alpha)$
8.	*Aliassing* – repliement de spectre	$f_e \geq 2f_{\max}$