Hiver 2018

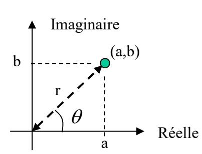
Analyse d'images
IMN 259

Séries et transformées
de Fourier 1D

Par
Pierre-Marc Jodoin

Rappel nombres complexes

Si x est un nombre complexe $\Rightarrow x = a + jb \quad a,b \in IR$ et $j = \sqrt{-1}$



$$\left.\begin{array}{l} x = a + jb = r\cos\theta + jr\sin\theta \\ \text{Amplitude} = r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{Phase} = \theta = \arctan(b/a) \end{array}\right.$$

Formule d'Euler:

$$\boxed{re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta}$$

Notation:

Algébrique:	$x = a + jb$
Cartésienne:	$x = (a, b)$
Polaire:	$x = (r, \theta)$
Géométrique:	$x = re^{j\theta}$
Trigonométrique:	$x = r\cos\theta + jr\sin\theta$

Propriétés des nombres complexes

Addition	$(a+jb)+(c+jd)=(a+c)+j(b+d)$
Soustraction	$(a+jb)-(c+jd)=(a-c)+j(b-d)$
Multiplication	$K(a+jb)=Ka+jKb$ $(a+jb)(c+jd) = (ac\text{-}db)+j(ad+bc)$ $Re^{j\theta} * Qe^{j\alpha} = RQe^{j(\theta+\alpha)}$
Conjugué	$x=a+jb \Rightarrow \bar{x}=a-jb$ $x=re^{j\theta} \Rightarrow \bar{x}=re^{-j\theta}$
Notation complexe de **sin** et **cos**	$\sin\theta=\frac{1}{2j}(e^{j\theta}-e^{-j\theta})$ $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})$

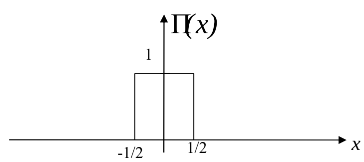
$$\mathrm{a,b,c,d},\theta,\mathrm{r},K \in IR$$

3

Quelques fonctions utiles pour la route

Fonction porte $\Pi(x)=\begin{cases}1 & \text{si } |x|\le 1/2 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x)dx = 1$$



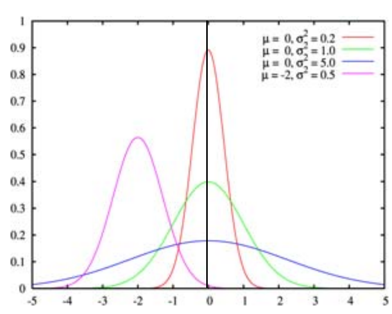
Fonction gaussienne (Normale)

$$N(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{N}(x;\mu,\sigma)dx=1$$

μ : moyenne
σ : écart type
σ^2 : variance

±σ	68.26894921371%
±2σ	95.44997361036%
±3σ	99.73002039367%

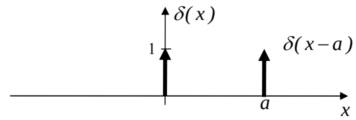


Wikipedia

4

Quelques fonctions utiles pour la route

<u>Delta de Dirac</u> $\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



(Delta de Dirac translaté)

Propriétés

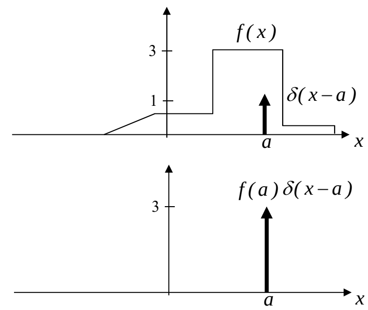
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

$$\delta(x) f(x) = \delta(x) f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) = f(0)$$

$$\delta(x-a) f(x) = \delta(x-a) f(a)$$

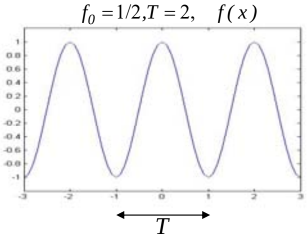
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) = f(a)$$



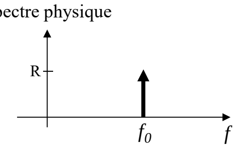
Notion de spectre

Soit un signal de fréquence f_0, $f(x) = R\cos(2\pi f_0 x)$

$f_0 = 1/2, T = 2,\quad f(x)$



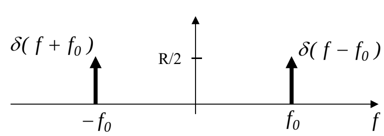
Spectre physique



Notation complexe du même signal

$$f(x) = \frac{R}{2}\left(e^{j2\pi f_0 x} + e^{-j2\pi f_0 x}\right)$$

Spectre mathématique
(Spectre d'amplitude)



Notion de spectre

Le principe du spectre de fréquences est illustré par les « *equalizers* » présents sur plusieurs chaines stéréo.

basse fréquences hautes fréquences

7

Série de Fourier

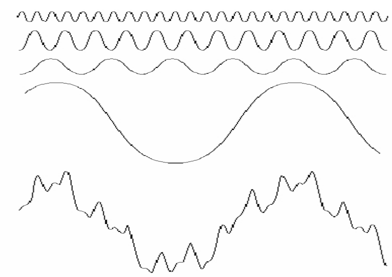
8

Série de Fourier de signaux périodiques

Soit un signal périodique $f(x)$ de période $T = 1/f_0$

> $f(x)$ peut se représenter par une somme dénombrable (mais parfois infinie) de sinus et de cosinus.

Exemple:



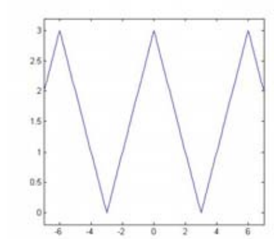
$f(x)$

Décomposition d'un signal *f(x)* en sinusoïdes de base.
La fonction du bas est la somme des 4 fonctions du dessus.

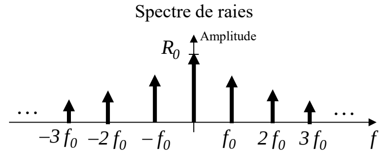
Série de Fourier de signaux périodiques

Soit un signal périodique $f(x)$ de période $T = 1/f_0$

$f(x)$
$T = 6$



Spectre de raies



R_0 Signal moyen (ici 1.5)
f_0 Fréquence fondamentale (ici 1/6)
nf_0 Fréquence harmonique

Mathématiquement, une série de Fourier c'est:

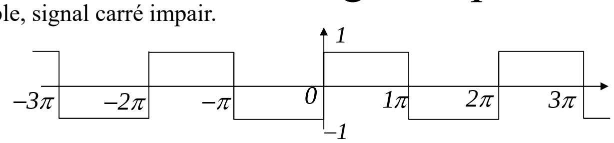
$$f(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x)$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(2\pi n f_0 x)dx$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(2\pi n f_0 x)dx$$

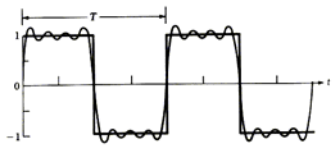
Série de Fourier de signaux périodiques

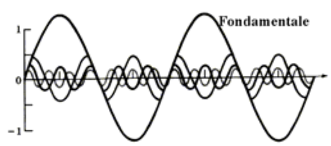
Exemple, signal carré impair.



$$f(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} ...\right)$$ Ici, $R_0 = 0$ et $f_0 = 1/2\pi$





Note: Signal pair : suite de cosinus $(B_n = 0)$
Signal impair : suite de sinus $(A_n = 0)$

Forme complexe d'une série de Fourier

Plus facile de manipuler des exponentielles complexes qu'une série de sin et de cos.

$$f(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x)$$

Petit rappel: $\cos(2\pi n f_0 x) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi n f_0 x} + e^{-j2\pi n f_0 x}\right)$ et $\sin(2\pi n f_0 x) = \frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi n f_0 x} - e^{-j2\pi n f_0 x}\right)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= R_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos(2\pi n f_0 x) + B_n \sin(2\pi n f_0 x)\right) \\
&= R_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{2}\left(e^{j2\pi n f_0 x} + e^{-j2\pi n f_0 x}\right) + \frac{B_n}{2j}\left(e^{j2\pi n f_0 x} - e^{-j2\pi n f_0 x}\right)\right) \\
&= R_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(A_n - jB_n)e^{j2\pi n f_0 x} + \frac{1}{2}(A_n + jB_n)e^{-j2\pi n f_0 x}\right) \\
&= R_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{j2\pi n f_0 x} + \overline{C}_n e^{-j2\pi n f_0 x}\right)
\end{aligned}$$

où $C_n = \frac{1}{2}(A_n - jB_n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)(\cos(2\pi n f_0 x) - j\sin(2\pi n f_0 x))dx$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j2\pi n f_0 x} dx$$

Forme complexe d’une série de Fourier

Qu’avons nous jusqu’à présent?

$$f(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x) \qquad \text{(série de Fourier)}$$

$$= R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n e^{j2\pi n f_0 x} + \bar{C}_n e^{-j2\pi n f_0 x} \right) \quad \text{où} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j2\pi n f_0 x} dx$$

Si $f(x)$ est un signal réel (ce qui est le cas 99.999% du temps en traitement d’images) alors $\bar{C}_n = C_{-n}$ et

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 x} \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j2\pi n f_0 x} dx \\ C_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j0} dx = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = R_0 \end{aligned}}$$

13

En résumé

Si $f(x)$ est un signal périodique

$$f(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x) \qquad A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(2\pi n f_0 x) dx \qquad B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(2\pi n f_0 x) dx$$

En remplaçant les « cos » et les « sin » par des « exp »

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 x} \qquad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j2\pi n f_0 x} dx$$

14

Transformée de Fourier

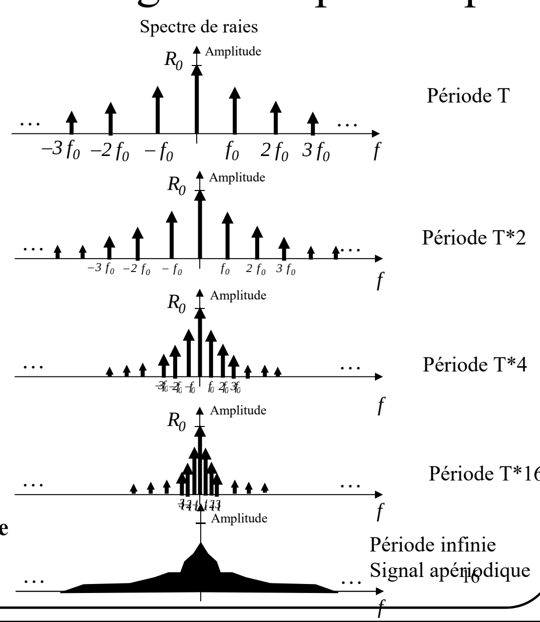
15

Série de Fourier d’un signal non périodique

Évidemment, plus la période d’un signal périodique est élevée et plus la fréquence fondamentale (ainsi que la distance entre les harmoniques) est petite.

Mathématiquement, on peut voir un signal **apériodique** comme un signal périodique de **période infinie**.

La série de Fourier d’un tel signal est une suite infinie et indénombrable de sinusoïdes. En d’autres mots, la **somme** est remplacée par une **intégrale**



16

Transformée de Fourier (TF)

<u>Série de Fourier</u> d'un signal périodique et réel *f(x)*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 x}$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-j2\pi n f_0 x}dx$$

Pour un signal apériodique, $T\rightarrow\infty$ et $nf_0=n/T\rightarrow u$. En remplaçant la somme par une intégrale et C_n par $F(u)$, on obtient une **<u>transformée de Fourier</u> (et son inverse)**

$$\Im^{-1}[F(u)]=f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du \quad \text{TFI}$$

$$\Im[f(x)]=F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx \quad \text{TF}$$

<u>x</u> est une coordonnée spatiale
<u>u</u> est une coordonnée fréquentielle (ou spectrale)

17

En résumé

Si *f(x)* est un signal périodique

$$f(x)=R_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(2\pi n f_0 x)+\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin(2\pi n f_0 x)$$

$$A_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(2\pi n f_0 x)dx$$

$$B_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(2\pi n f_0 x)dx$$

En remplaçant les « cos » et les « sin » par des « exp »

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 x} \qquad C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-j2\pi n f_0 x}dx$$

En étirant à l'infini la période T du signal *f(x)*

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du \qquad F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

18

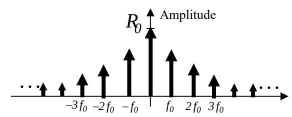
Transformée de Fourier (TF)

Série de Fourier *Vs* Transformée de Fourier

Une **<u>série de Fourier</u>** représente un signal périodique *f(x)* à l'aide d'une suite souvent infinie mais toujours dénombrable de sin et de cos.

En notation exponentielle complexe

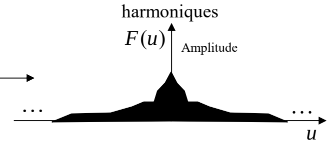
Spectre de raies



Une **<u>tranformée de Fourier</u>** représente un signal apériodique* *f(x)* à l'aide d'une suite souvent infinie et indénombrable de sinusoïdes.

En notation exponentielle complexe

Continuum de fréquences harmoniques



(*) évidemment, une TF peut aussi servir à représenter un signal périodique.

Transformée de Fourier (TF)

Autre façon de représenter la TF *F(u)*

$$F(u) = Re[F(u)] + j\,Im[F(u)] = \underline{R(u)} + j\underline{I(u)}$$

$$F(u) = |F(u)|e^{j\theta(u)}$$

(Réelle) (Imaginaire)

$$\theta(u) = arctan(I(u)/R(u))$$: Phase

$$|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I(u)^2}$$: Spectre d'amplitude

$$|F(u)|^2 = R(u)^2 + I(u)^2$$: Spectre de puissance

Propriétés d'une TF

soient $\Im[f] = F, \Im[g] = G$ et $a,b \in IR$

Linéarité:

$$\Im[af + bg] = aF + bG$$
$$\Im^{-1}[aF + bG] = af + bg$$

Translation:

$$\Im[f(x-a)] = e^{-j2\pi ua}F(u)$$
$$\Im^{-1}[F(u-a)] = e^{j2\pi xa}f(x)$$

Changement d'échelle:

$$\Im[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a})$$

Dérivée:

$$\Im[\frac{d^n}{d^n x}f(x)] = (j2\pi u)^n F(u)$$
$$\Im^{-1}[\frac{d^n}{d^n u}F(u)] = (-j2\pi x)^n f(x)$$

21

Propriétés d'une TF

si $f(x)$ est pair, alors $F(u)$ est réel $(I(u) = 0)$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(cos(2\pi ux) - j\,sin(2\pi ux))dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin(2\pi ux)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos(2\pi ux)dx \end{aligned}$$

si $f(x)$ est impair, alors $F(u)$ est imaginaire $(R(u) = 0)$

si $f(x)$ est pair, alors $\Im(f(x)) = \Im^{-1}(F(u))$

Exemples page suivante.

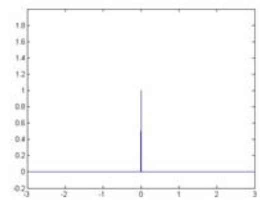
22

TF de fonctions utiles

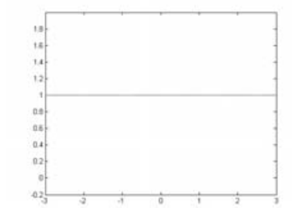
Delta de Dirac

$$\Im[\,\delta(x)] = 1$$
$$\Im^{-1}[\,\delta(u)] = 1$$

$f(x)$

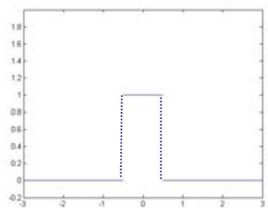


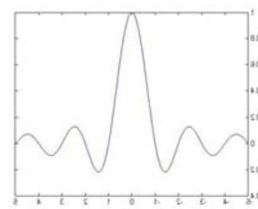
$|F(u)|$



Fonction « Porte »

$$\Im[\,\Pi(x)] = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} = \mathrm{sinc}(u)$$
$$\Im^{-1}[\,\Pi(u)] = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x)$$





23

TF de fonctions utiles

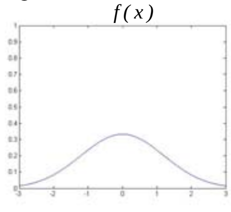
Fonction Gaussienne (dont $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ **)**

$$\Im[\,\mathrm{e}^{-\pi x^2}\,] = \mathrm{e}^{-\pi u^2}$$
$$\Im^{-1}[\,\mathrm{e}^{-\pi u^2}\,] = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$$

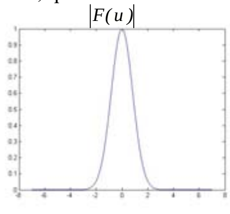
On peut démontrer, par les propriétés de changement d'échelle et de linéarité, que

$$\Im[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\,] = \mathrm{e}^{-2\pi^2 u^2\sigma^2}$$
$$\Im^{-1}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-u^2/2\sigma^2}\,] = \mathrm{e}^{-2\pi^2 x^2\sigma^2}$$

$f(x)$



$|F(u)|$



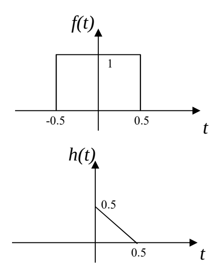
24

Convolution

25

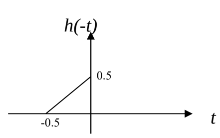
Convolution spatiale

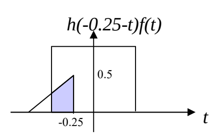
Concept fondamental en traitement d'images, à la base de nombreux **filtres**.



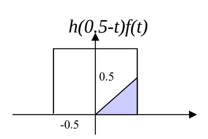
Soient *f(t)* et *h(t),* deux signaux 1D.

$$\boxed{(f * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(x-t)dt}$$

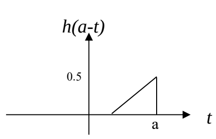


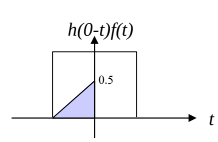


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(-0.25-t)dt = 3/32$$

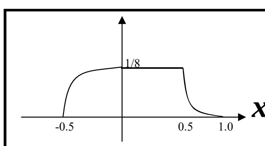


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(0.5-t)dt = 1/8$$





$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(0-t)dt = 1/8$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(x-t)dt$$

26

Note: on appelle parfois « filtre » la fonction *h(x)*

Convolution spatiale Vs TF

On peut facilement démontrer que:

$$\boxed{\Im\left((f * h)(x)\right) = F(u)H(u)}$$

où

$$\Im\left(f(x)\right) = F(u)$$
$$\Im\left(h(x)\right) = H(u)$$

de même,

$$\Im^{-1}((F * H)(u)) = f(x)h(x)$$

en résumé:

$$* \underset{\Im^{-1}}{\overset{\Im}{\rightleftarrows}} \times$$
$$\times \underset{\Im^{-1}}{\overset{\Im}{\rightleftarrows}} *$$

27

Convolution
Autres propriétés

- Commutativité

$$f * h = h * f$$

- Associativité

$$(f * h) * g = f * (h * g)$$

- Distributivité

$$f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$$

- Multiplication scalaire

$$a(f * h) = (af) * h = f * (ah)$$

28

Convolution discrète

29

Convolution discrète

La convolution

Cas continu

$$(f*h)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(x-t)dt$$

Cas discret

$$(f*h)(x)=\sum_{t=-\infty}^{\infty} f(t)h(x-t)$$

Rappel théorème de la convolution

$$\Im\big((f*h)(x)\big)=F(u)H(u) \quad \text{et} \quad \Im^{-1}((F*H)(u))=f(x)h(x)$$

Note: ce théorème est valable pour les cas continu et discret

30

Convolution discrète

Exemple 1D

(signal d'entrée) *f(x)*

1	2	3	4	5

x=0

(filtre) *h(x)*

1	2	3

x=0

*(f*h)(1)*

1	2	3	4	5
×	×	×		
3	2	1		

3+4+3

	10			

*(f*h)(2)*

1	2	3	4	5
	×	×	×	
	3	2	1	

6+6+4

	10	16		

*(f*h)(3)*

1	2	3	4	5
		×	×	×
		3	2	1

9+8+5

	10	16	22	

31

Convolution discrète

***Comment gérer les bords? Comment calculer** (f*h)(0)?*

x=-1

?	1	2	3	4	5
×	×	×			
3	2	1			

***Option 1 :** Ajout de zéros*

f(x)

0	0	1	2	3	4	5	0	0

*(f*h)(x)*

4	10	16	22	22

***Option 2 :** Enroulement*

f(x)

4	5	1	2	3	4	5	1	2

*(f*h)(x)*

19	10	16	22	23

***Option 3 :** Réflexion*

f(x)

3	2	1	2	3	4	5	4	3

*(f*h)(x)*

10	10	16	22	26

***Option 4 :** Étirement*

f(x)

1	1	1	2	3	4	5	5	5

*(f*h)(x)*

7	10	16	22	25

32

Échantillonnage et périodicité

33

Échantillonnage et périodicité

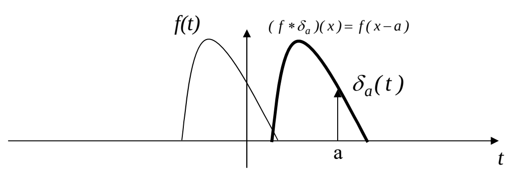
On se souvient des propriétés du **delta de Dirac:**

$\delta(x)f(x)=\delta(x)f(0)$ et $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)=f(0)$ car $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)=1$

$\delta(x-a)f(x)=\delta(x-a)f(a)$ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)f(x)=f(a)$

Étant donné , on peut affirmer que

$$(f*\delta)(x)=f(x) \quad \text{et} \quad (f*\delta_a)(x)=f(x-a) \qquad \text{où } \delta_a(x)=\delta(x-a)$$

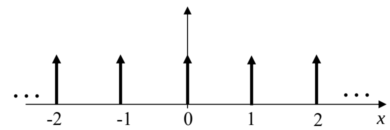


34

Échantillonnage et périodicité

Le **peigne de Dirac**

$$Ш(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

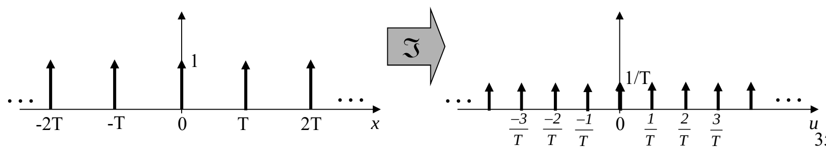


Une propriété intéressante :

$$\Im(Ш(x)) = Ш(u)$$

Suivant la propriété du **changement d'échelle**, la TF d'un peigne de Dirac de période ***T***

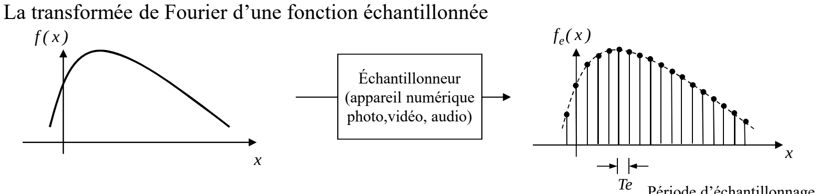
$$\Im(Ш(Tx)) = \frac{1}{T}\, Ш\left(\frac{u}{T}\right)$$



35

Échantillonnage et périodicité

La transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée



Mathématiquement, cette opération revient à

$$f_e(x) = f(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nT_e)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-nT_e)$$

En prenant la TF de $f_e(x)$ on obtient le résultat suivant:

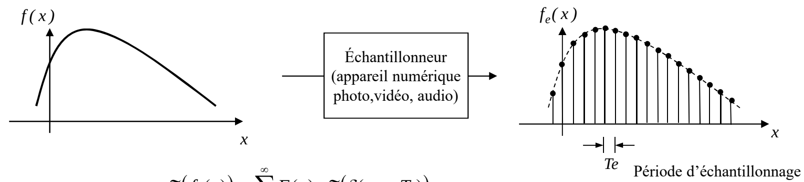
$$\Im\left(f_e(x)\right) = \Im\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-nT_e)\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Im\left(f(x)\delta(x-nT_e)\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Im\left(f(x)\right) * \Im\left(\delta(x-nT_e)\right)$$ (en vertu des propriétés de la convolution)

Échantillonnage et périodicité

La transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée



$$\Im\big(f_e(x)\big)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(u)*\Im\big(\delta(x-nT_e)\big)$$

$$=F(u)*\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Im\big(\delta(x-nT_e)\big)\right)$$

$$=F(u)*\left(\Im\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nT_e)\right)\right)$$

$$=F(u)*\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(u-\frac{n}{T_e})$$

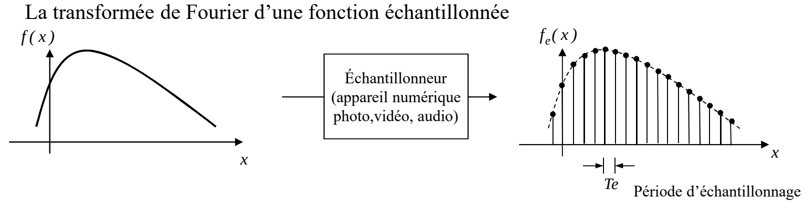
$$=\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(u)*\delta(u-\frac{n}{T_e})$$

$$=\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(u-\frac{n}{T_e})$$

$$\boxed{=\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(u-nf_e)}$$

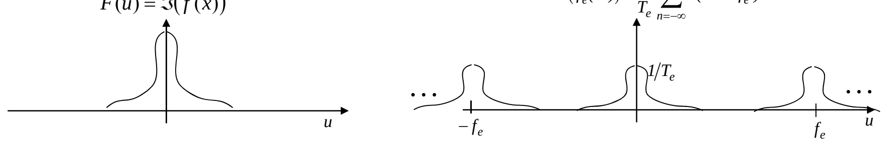
Échantillonnage et périodicité

La transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée



Échantillonner un signal spatial revient à le **dupliquer à l'infini dans le domaine spectral**

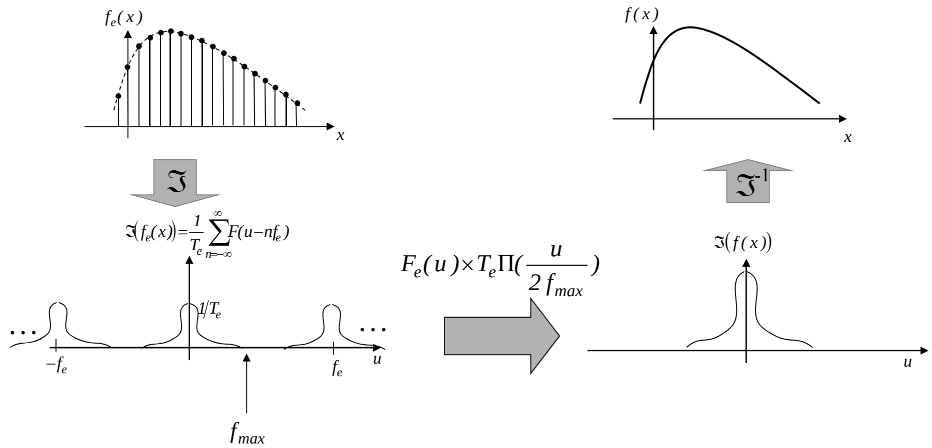
$F(u)=\Im\big(f(x)\big)$ $\qquad$ $\Im\big(f_e(x)\big)=\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(u-nf_e)$



38

Échantillonnage et périodicité

Étant donnée $f_e(x)$, il est possible de retrouver $f(x)$ à l'aide de la procédure suivante

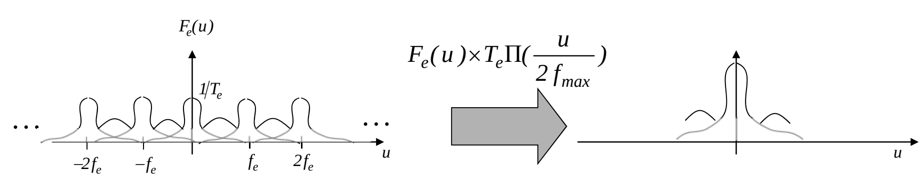


Échantillonnage et périodicité

Un signal *f(x)* de fréquence maximale f_{max} est parfaitement déterminé par $f_e(x)$ lorsque

$$\boxed{f_e \geq 2f_{max}}$$ (Fréquence de Nyquist)

Lorsque $f_e < 2f_{max}$ alors survient un problème de repliement de spectre mieux connu sous le nom **d'aliassing**.



Les faits saillants…

1. Les nombres complexes	$x = a + jb \Rightarrow re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$
2. Si *f(x)* est un signal périodique	$f(x) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x)$ $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 x}$ avec $C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j2\pi n f_0 x} dx$
3. Si *f(x)* est un signal apériodique	$\Im[f(x)] = F(u) = \int_{\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$ $\Im^{-1}[F(u)] = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$
4. Convolution	$\Im((f * h)(x)) = F(u)H(u)$ et $\Im^{-1}((F * H)(u)) = f(x)h(x)$
5. Échantillonnage	Échantillonner un signal spatial revient à le dupliquer à l'infini dans le domaine spectral.
6. Nyquist	$f_e \geq 2 f_{max}$

41